

## Activités de Recherches de François COQUET

Mes travaux de recherches portent sur l'étude des processus à temps continus et se situent de part et d'autre de la frontière entre leur étude probabiliste (notamment en termes de théorèmes limites) et une vision statistique (utilisation des théorèmes limites pour des questions de statistique asymptotique). Bien qu'un découpage soit toujours arbitraire, j'ai essayé pour plus de clarté de regrouper ces travaux par thèmes, étant bien entendu que ces thèmes ne sont pas étanches mutuellement.

### **1. Statistiques des processus 1 : processus de vraisemblance, processus de vraisemblance partielle et processus de Hellinger** (travaux [1], [2], [14], [15]).

Ces travaux sont l'objet de ma Thèse d'Université [16]. Il s'agissait de trouver des conditions assurant la convergence d'expériences statistiques filtrées à travers le processus de vraisemblance. Le processus de Hellinger, candidat « naturel » dans le cadre des processus indépendants, s'est révélé moins performant hors de ce cadre (voir tout de même [15]). En revanche, des résultats de convergence pour processus de vraisemblance partielle (c'est-à-dire, pour des expériences où les observations sont incomplètes) ont été obtenus en [1], permettant de retrouver des propriétés de normalité asymptotique de type LAN. Ces résultats, qui s'expriment de manière élégante à partir d'exponentielles de Doléans, ont suscité une étonnante question : si les exponentielles de Doléans des processus de Hellinger convergent, on peut en déduire la convergence des processus de vraisemblance stoppés au premier instant où ils ont un saut d'amplitude égale à  $-1$  ; peut-on en déduire la convergence des processus de vraisemblance non arrêtés ? Cette question est étudiée en détail dans l'article [2]. Enfin, on trouve en [14] une généralisation au cadre filtré de la notion de mesure conique utilisée notamment par Le Cam en théorie asymptotique de la décision.

### **2. Statistique des processus 2 : Vitesse de convergence en loi dans les théorèmes limites fonctionnels** (travaux [3], [4], [17], [18]).

En continuité avec les travaux antérieurs, j'ai été amené à m'intéresser à la vitesse de convergence en loi de suites d'expériences statistiques filtrées (c'est-à-dire la vitesse de convergence en loi des processus de vraisemblance associés). Sommairement, cette question peut s'exprimer en termes de distance en loi entre une martingale locale et un mouvement brownien. A l'aide d'une méthode de plongement dans le mouvement brownien et d'un jeu sur les rapports entre distances en loi et distances en probabilité de processus, nous avons obtenu des résultats assez généraux à partir de critères adaptés (reposant sur la notion de variation quadratique) [17] ou prévisibles (reposant sur les crochets de martingale) [3]. Si ces derniers sont les plus utiles pour exprimer les résultats statistiques attendus en termes de processus de vraisemblance et de processus de Hellinger, les critères adaptés nous ont permis de considérer des limites plus générales, essentiellement des fonctionnelles du mouvement brownien ou des solutions d'équations différentielles stochastiques [4], éventuellement avec temps local [18].

### **3. Statistique des processus 3 : Processus observés à des instants discrets**

Mon arrivée en détachement à l'ENSAI en septembre dernier, mon affiliation au laboratoire de Statistique et Modélisation du CREST ainsi que mon association à la nouvelle équipe de Statistique de l'IRMAR (Institut de Recherche Mathématique de Rennes) m'ont amené à

revenir vers la recherche en Statistique. Mon parcours précédent rend naturel un retour vers la statistique des processus à temps continu. Je fais donc partie du groupe de travail nouvellement créé au sein de cette équipe sur la Statistique des Diffusions à observations discrètes. J'ai fait pour ce groupe de travail les deux premiers exposés de synthèse sur l'état de l'art en matière de statistique des diffusions continues observées à instants discrets. L'orientation prévisible est de s'intéresser au cadre de processus non continus, et de se pencher sur les problèmes réels, et souvent posés de manière inhabituelle pour des mathématiciens, qui intéressent notamment les biologistes et les biochimistes, et pour lesquels ce type de modélisation pourrait être éclairant (on peut penser notamment aux phénomènes d'inhibition et de stimulation de la transcription dans les chaînes d'ADN).

Dans un domaine connexe, une étude sur les théorèmes limites pour des processus de Markov avec sauts avec application en biologie moléculaire dans le cadre de faibles concentrations, c'est-à-dire lorsqu'on ne peut appliquer ni limite fluide, ni approximation par des diffusions, est en cours avec Ovidiu Radulescu.

#### **4. Etude des processus de Dirichlet** (travaux [6], [12], [13], [26]).

Les processus de Dirichlet sont une généralisation des semi-martingales qui intervient naturellement dans les problèmes de fonctionnelles additives d'énergie nulle associés à des processus de Markov, ou dans les modélisations de problèmes dits "à longue mémoire".

Après des travaux sur la stabilité de suites de processus de Dirichlet continus [6], je me suis attaché à donner une définition cohérente des processus de Dirichlet non continus, à montrer que ces processus sont stables par transformation continûment dérivable, à donner une formule de type Itô pour ces transformations et à en déduire des éléments d'intégration stochastique par rapport aux processus de Dirichlet. Ces résultats se trouvent dans l'article [12]

Plus récemment, avec les mêmes co-auteurs ainsi qu'Adam Jakubowski (Université de Torun, Pologne), je me suis intéressé aux processus de Dirichlet faibles, extension des précédents permettant de traiter des intégrales singulières, notamment les représentations de processus fractionnaires. Plus encore que celle de processus de Dirichlet, cette notion nous amène à regarder d'un œil neuf et attentif des objets dont le maniement n'est plus celui habituel dans le champ du calcul stochastique standard. C'est le cas notamment de la variation quadratique, dont plusieurs définitions non équivalentes entre elles (mais cohérentes avec la variation quadratique usuelle des semi-martingales) peuvent être mises en concurrence. Il en résulte là encore une formule de type Itô pour des transformations continûment dérivables, avec des exemples précis de processus de Dirichlet faibles n'appartenant pas aux familles de processus traditionnelles. Les résultats correspondants font l'objet d'un assez long article [13] ; certaines précisions et variantes seront publiées dans des proceedings [26].

#### **5. Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades et Martingales non-linéaires** (travaux [5], [7], [11], [19], [22], [23]).

Ma contribution à la vaste littérature récente sur les Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSR) a pris plusieurs aspects. Outre un court article [18] destiné à illustrer pourquoi une EDSR réfléchie ne pouvait pas être abordée « naïvement » comme un problème de réflexion de Skorokhod « rétrograde », j'ai étudié deux aspects des EDSR.

Le premier a consisté à étudier la stabilité d'une solution d'EDSR quand les informations (symbolisées par la filtration de l'équation) sont incomplètes (typiquement, quand le processus sous-jacent n'est observé qu'à des instants discrets). Fait remarquable, il ne suffit

pas en général que le pas de discrétisations tende vers 0 pour que la solution de l'EDSR discrétisée converge vers la solution de l'EDSR d'origine. Ce fait est exposé dans l'article [5], où on trouve aussi des conditions assurant la convergence désirée, conditions qui amèneront à l'étude de la convergence des suites de filtrations (voir §6. ci-dessous).

Deuxième aspect, nous avons approfondi l'étude des notions de g-espérance et g-martingale, introduites par Shige Peng pour développer l'analogie formelle entre les notions d'espérance et d'espérance conditionnelle d'une part, et les solutions d'EDSR d'autre part. L'objet rendant compte de cette analogie est appelée « espérance non-linéaire », et sa contre-partie en termes de processus « martingale non-linéaire ». Après avoir prolongé cette logique dans [7] et avoir au passage montré un résultat général de comparaison inverse pour les EDSR [22], nous avons montré dans [11] (voir aussi [23]) que, sous des hypothèses raisonnables, toute « martingale non-linéaire » pouvait s'exprimer comme la solution d'une EDSR.

## **6. Etude de la convergence des suites de filtrations** (travaux [5], [8], [10], [19], [25]).

L'étude des problèmes d'observation indirecte et incomplète d'un phénomène aléatoire par le biais de la comparaison entre la filtration naturelle du phénomène à observer et celle engendrée par les processus observés a été l'objet de plusieurs de mes articles depuis 1999, avec différents co-auteurs [5], [8], [10] (on peut aussi, dans une veine connexe, citer le résultat [19]).

Globalement, ces travaux étaient motivés par la question : quand, et en quel sens, une observation de plus en plus fidèle permet-elle de se "rapprocher" asymptotiquement, en termes de filtrations, de la situation idéale où l'on dispose de l'observation parfaite du phénomène étudié ? La réponse générale est que la réponse est positive dans le cas où l'on a convergence des filtrations associées aux observations vers la filtration du système étudié. Mes travaux ont donc porté dans un premier temps sur les conditions permettant d'obtenir ce type de convergence, ainsi que sur les propriétés qu'on pouvait en déduire.

Des développements récents sur ce thème ont été donnés dans la thèse de **Sandrine Toldo**, soutenue le 25 novembre 2005 : on y étudie, toujours dans le contexte d'observations imparfaites, la stabilité de valeurs optimales et de temps d'arrêt optimaux relatifs au problème observé (typiquement, le temps d'exercice optimal et le pay-off optimal pour une option américaine lorsqu'un modèle de Black et Scholes est approché par un modèle de Cox-Ross-Rubinstein). Les résultats obtenus prouvent, sous des hypothèses techniques raisonnables, la stabilité des valeurs optimales quand on a convergence des filtrations et aussi, ce qui est finalement plus remarquable, dans le cas très naturel où les filtrations pré-limites sont incluses dans la filtration limite (ce qui couvre le cas des observations incomplètes, notamment des discrétisations). La stabilité de temps d'arrêt optimaux s'avère plus exigeante en hypothèses, toutefois elle est réalisée dans un cadre couvrant le problème des options américaines [25]

## **7. Autres résultats** (travaux [9], [21])

Je place ici deux travaux « sans suite », l'un [9] autour de la notion de puissance « critique » d'un processus, c'est-à-dire celle au-delà de laquelle il ne possède plus de temps local, l'autre [21], sans doute plus significatif, sur l'extension du problème de réflexion de Skorokhod au cadre non-continu : nous y discutons différentes propositions pour cette extension, ainsi que la pertinence de diverses topologies pour exprimer la stabilité du problème de réflexion ; le résultat principal est que dans le cas unidimensionnel, la topologie dite  $M_1$  est l'outil naturel pour exprimer cette stabilité.

## **8. Encadrement de thèse**

La thèse de Sandrine Toldo, effectuée sous ma direction, a été soutenue à l'Université de Rennes 1 le 25 novembre 2005, et vient de valoir à son auteur la qualification en 25<sup>ème</sup> et 26<sup>ème</sup> sections CNU. Outre l'aspect convergence de temps d'arrêt optimaux et de valeurs optimales déjà cité plus haut, ainsi que plusieurs résultats préliminaires précisant les propriétés associées à la convergence des filtrations, cette thèse comporte une partie s'intéressant à la stabilité de solutions d'Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSR) à horizon aléatoire. Là encore, il s'agit de voir sous quelles conditions une EDSR peut être approchée quand le mouvement brownien qui la dirige est soit observé à temps discret, soit approché par une marche aléatoire. La difficulté spécifique de l'exercice réside dans le fait que les temps d'arrêt associés au mouvement brownien ne coïncident pas avec les temps d'arrêt des processus qui l'approchent, ce qui nécessite donc un traitement approprié. Sandrine Toldo a tiré de cette partie un résultat à paraître dans ESAIM.